

Тема 4. Элементы аналитической геометрии.

§1. Понятие уравнения линии. Составление уравнения линии

Определение 1. *Линия на плоскости* — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению, причем, координаты точек не лежащих на линии этому уравнению не удовлетворяют.

Определение 2. Произвольная точка M линии называется *текущей точкой* линии, а ее координаты - *текущими координатами*.

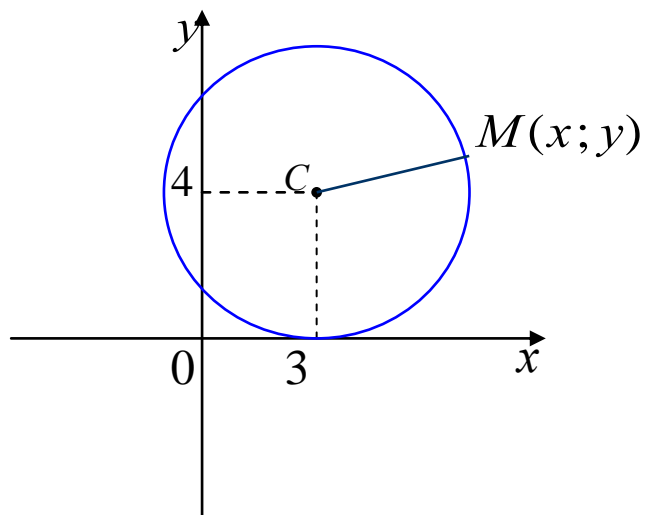
Определение 3. Уравнение, связывающее переменные x и y , называется *уравнением линии*, если ему удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на линии, и не

удовлетворяют координаты точек,
не лежащих на линии.

Для составления уравнения линии
необходимо:

- 1.выбрать произвольную (текущую) точку $M(x; y)$;
- 2.выписать все условия в виде равенства отрезков, с выполнением которых эта точка попадает на линию;
- 3.выразить все эти отрезки, входящие в равенство, через данные задачи и координаты текущей точки;
- 4.упростить выражение.

Пример: Составить уравнение окружности с центром в точке $C(3;4)$ и радиусом $R=5$. Проверить, лежат ли на этой окружности точки $O(0;0)$, $A(7;1)$, $B(2;3)$.



$M(x; y)$

1) $CM = R = 5$

2) $CM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$

3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

Аналогично можно составить уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R , тогда получим:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad - \text{нормальное}$$

уравнение окружности

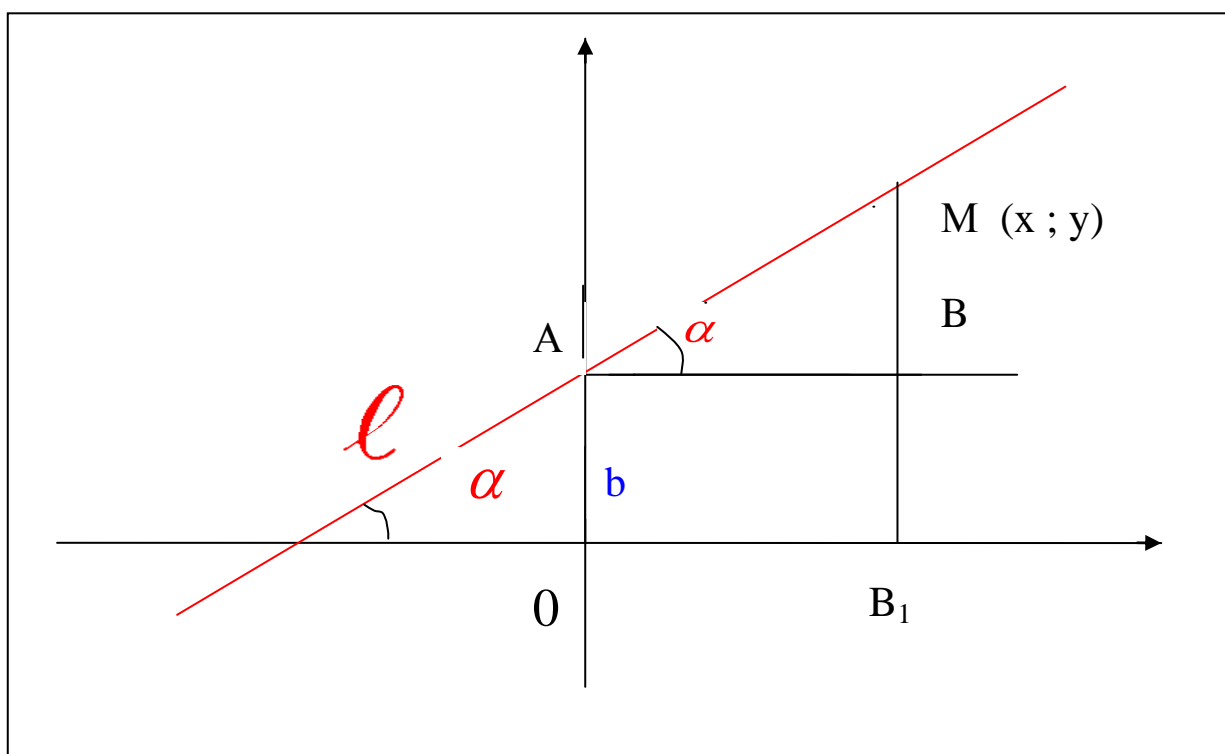
Если центр окружности находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad - \text{каноническое уравнение}$$

окружности.

Прямая на плоскости

§2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Пусть прямая l имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси OY отрезок равный b . Составим уравнение этой прямой.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha = k$$

$$MB = B_1M - BB_1 = y - b$$

$$AB = OB_1 = x$$

$$k = \frac{y - b}{x} \quad ; \quad kx = y - b$$

$$\boxed{y = kx + b} \quad (1) \text{ - уравнение прямой с}$$

угловым коэффициентом, где

x, y – текущие координаты

k – угловой коэффициент

b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY .

§3 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (уравнение пучка прямых)

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой k . Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$ (1). Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению $\Rightarrow y_0 = kx_0 + b$ (2)
 Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е:

$$\begin{aligned} - \quad y &= kx + b \\ y_0 &= kx_0 + b \end{aligned}$$

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \quad (2) \text{ - уравнение}$$

пучка прямых.

§4 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Для вывода этого уравнения воспользуемся уравнением пучка прямых. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2), т.е. пучок прямых проходит через точку $A(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (1)$$

Но точка B также $\in l \Rightarrow$ и ее координаты удовлетворяют уравнению (1):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

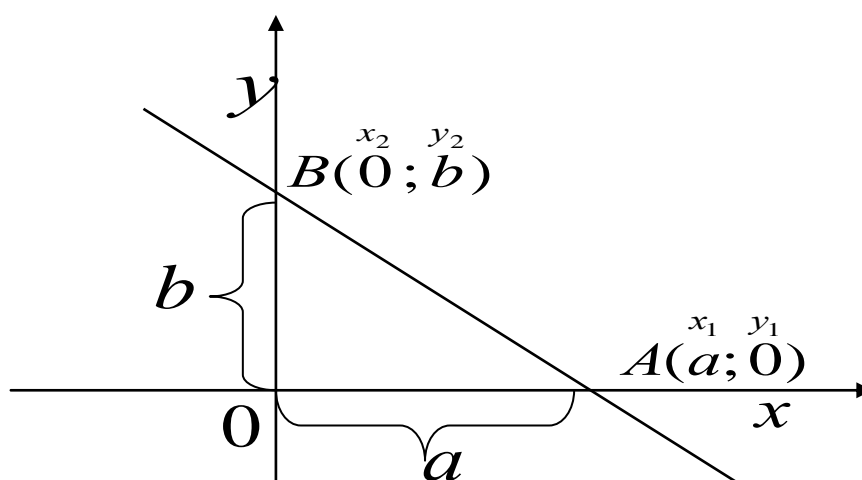
Разделим почленно уравнение (1) на (2),

получим:
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{k(x - x_1)}{k(x_2 - x_1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \quad (3) \quad \text{- уравнение}$$

прямой, проходящей через две точки.

§5 Уравнение прямой в отрезках на осях



Вспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

. Подставим в него вместо

$(x_1; y_1)$ координаты точки A , а вместо

$(x_2; y_2)$ координаты точки B .

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} ;$$

Получим:

$$\frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} ; \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 ,$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad (4) \quad \text{- уравнение прямой в}$$

отрезках на осях,

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY .

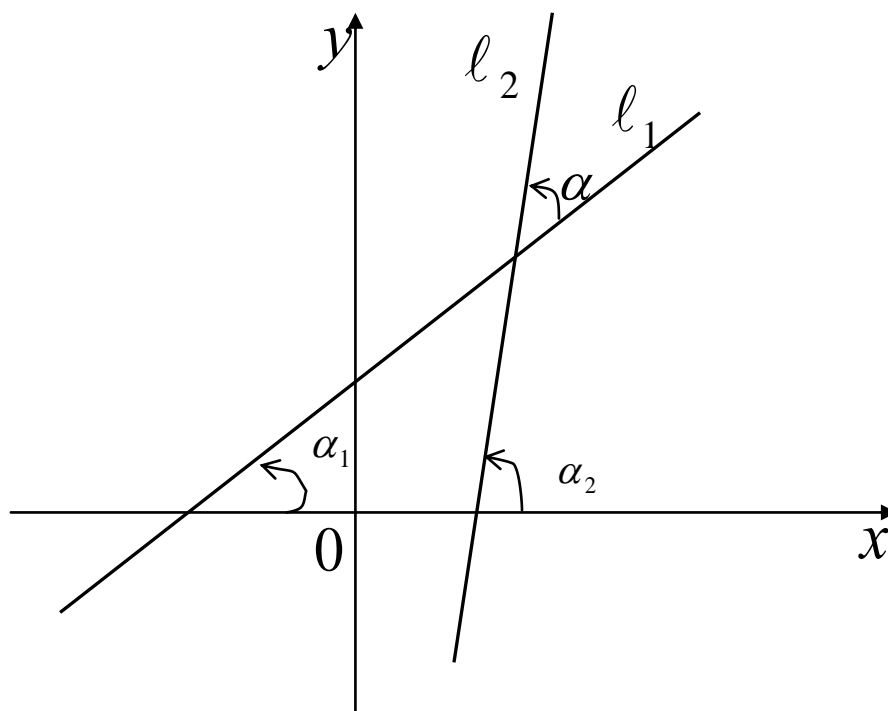
§6 Общее уравнение прямой

Теорема. Всякое невырожденное уравнение
1-й степени $Ax + By + C = 0$
($A^2 + B^2 \neq 0$) представляет собой
уравнение некоторой прямой линии на
плоскости XOY , т.е.

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (5) \quad \text{- общее уравнение}$$

прямой.

§7 Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых



Если у двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 , то можно найти угол между двумя прямыми:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1 \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2 \quad ; \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$, а по формуле

тангенса разности имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad \text{или}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|}.$$

Частные случаи:

1) Пусть $l_1 \parallel l_2$, тогда угол между ними равен нулю ($\alpha = 0$). Тогда:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad ; \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \quad ; \quad \boxed{k_1 = k_2} &\quad \text{т.е.,} \end{aligned}$$

если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

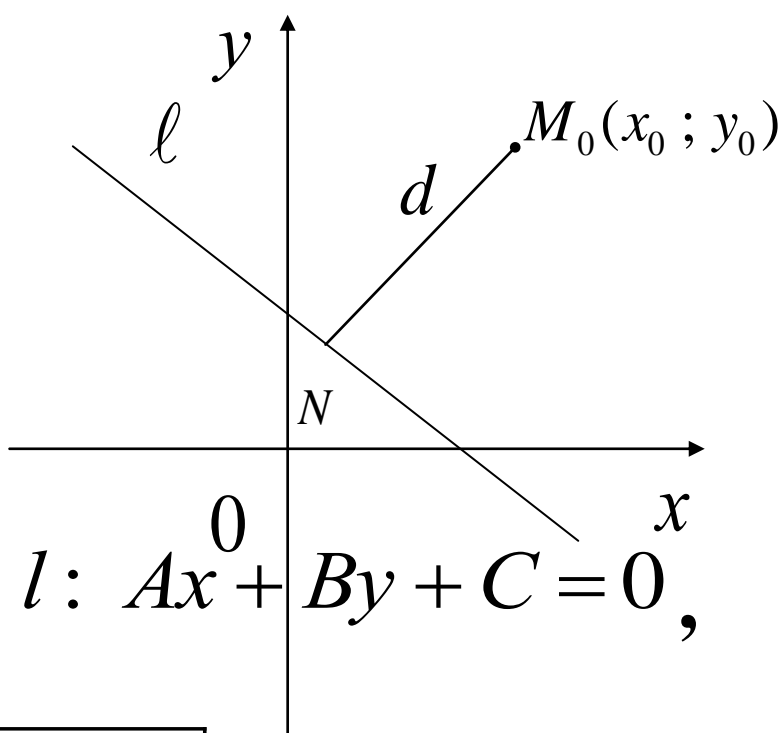
2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда $\alpha = 90^\circ$, а тангенс 90° - не существует

$$\begin{aligned} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \text{не существует} &\Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 &\Rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \quad , \text{т.е.} \end{aligned}$$

если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

§8 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки M_0 до прямой l понимают длину перпендикуляра $M_0N = d$, опущенного из точки M на прямую l .



$$M_0 \notin l \quad ; \quad l: Ax + By + C = 0,$$

тогда

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(без вывода)

Чтобы найти расстояние от точки до прямой, следует в общее уравнение прямой подставить координаты точки M_0 , взять это

выражение по модулю и разделить на квадратный корень из $A^2 + B^2$.

§9. Координаты точки пересечения линий

Для того чтобы найти точки пересечения двух линий, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

Пример: Найти точки пересечения параболы

$y = x^2$ и прямой $y = 5x - 6$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 5x - 6 \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 &= 5x - 6 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 4; \quad y_2 = 9$$

$$\Rightarrow A(2;4) \quad ; \quad B(3;9)$$

§10 Точка пересечения двух прямых

Пусть:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad ;$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Чтобы найти точку пересечения двух прямых, нужно решить систему уравнений, состоящую из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

1. Система имеет **единственное решение**, если $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$$

- чтобы прямые пересекались в одной точке, коэффициенты при неизвестных их общих уравнений должны быть непропорциональны.

2. Система *не имеет решений*, если $\Delta = 0; \Delta_x \neq 0$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} ; \quad \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}$$

3. Система имеет *множество решений*, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

§11. Нахождение координат любой точки, принадлежащей данной прямой.

Чтобы найти координаты точки, принадлежащей данной прямой, следует одну координату взять произвольно, подставить в уравнение, а вторую координату найти из уравнения.

Пример: указать координаты точки, принадлежащей прямой $2x+3y+4=0$.

Решение: возьмем $x=1$.

Подставим в уравнение: $2 \cdot 1 + 3y + 4 = 0$

Отсюда находим y : $y = -2$

Ответ: $(1; -2)$ принадлежит прямой.

§12. Кривые второго порядка

Определение 1. *Кривой второго порядка* называется линия, которая аналитически определяется уравнением 2-й степени относительно x и y .

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}, \text{ где}$$

A, B, C, D, E, F – действительные числа.

В зависимости от значения коэффициентов A, B, C получаются различные виды кривых,

причем коэффициенты A , B , C не могут одновременно равняться нулю.

К кривым второго порядка относятся:

1. окружность (см. [§1](#))
2. эллипс
3. гипербола
4. парабола

§13 Эллипс

Определение 1. Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, называется **эллипсом**.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad - \text{ каноническое уравнение}$$

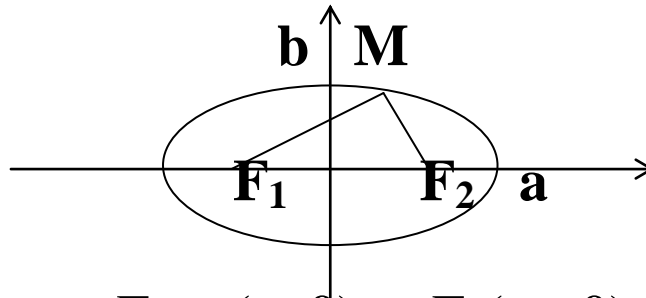
эллипса, где

a – большая полуось;

b – малая полуось.

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \quad - \text{ нормальное}$$

уравнение эллипса.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется эксцентриситетом.

$e = c/a.$

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

§14 Гипербола

Определение 1. Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная $2a$, называется *гиперболой*.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- *каноническое уравнение*

гиперболы, где

a – действительная полуось;

b - мнимая полуось.

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

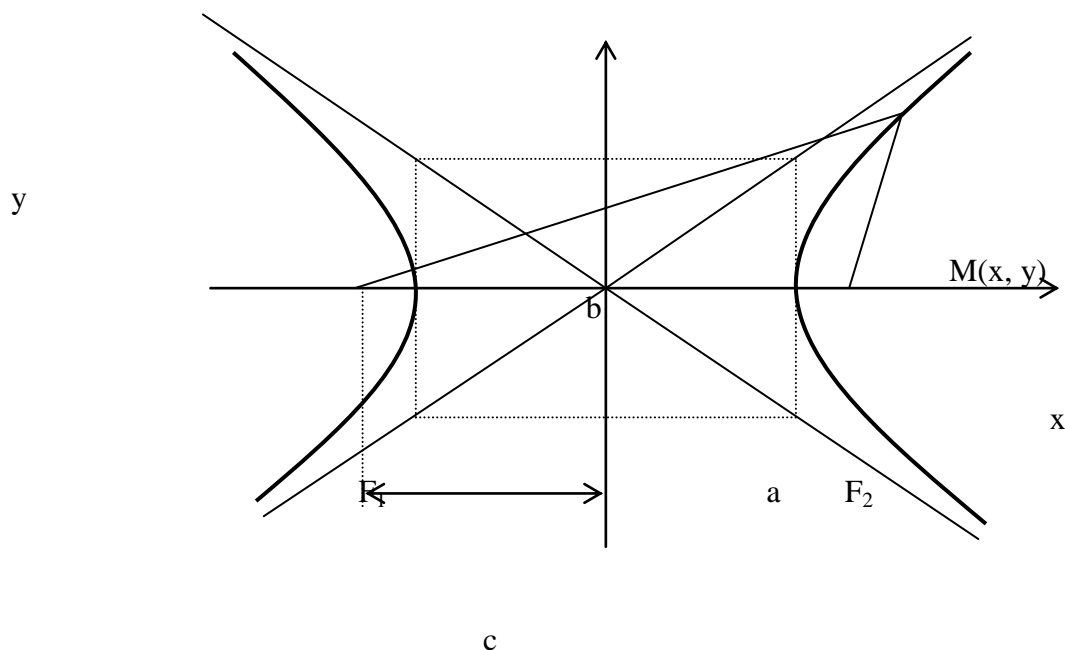
- *нормальное*

уравнение гиперболы,

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

- *уравнение асимптот*

гиперболы.



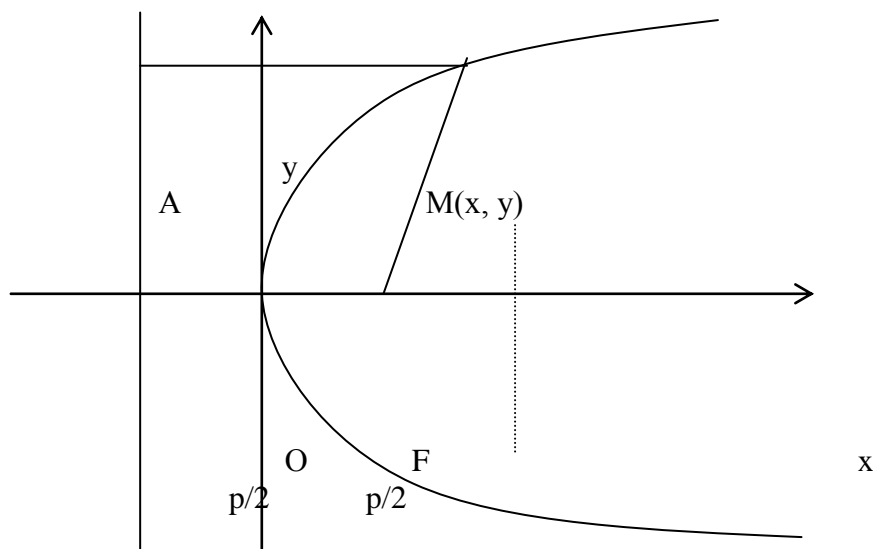
F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.
 $c^2 = a^2 + b^2$

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

§15 Парабола

Определение 1. Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется *параболой*.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



$y^2 = 2px$ — каноническое уравнение параболы.

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

уравнение параболы со
смещенной вершиной

(нормальное уравнение параболы)

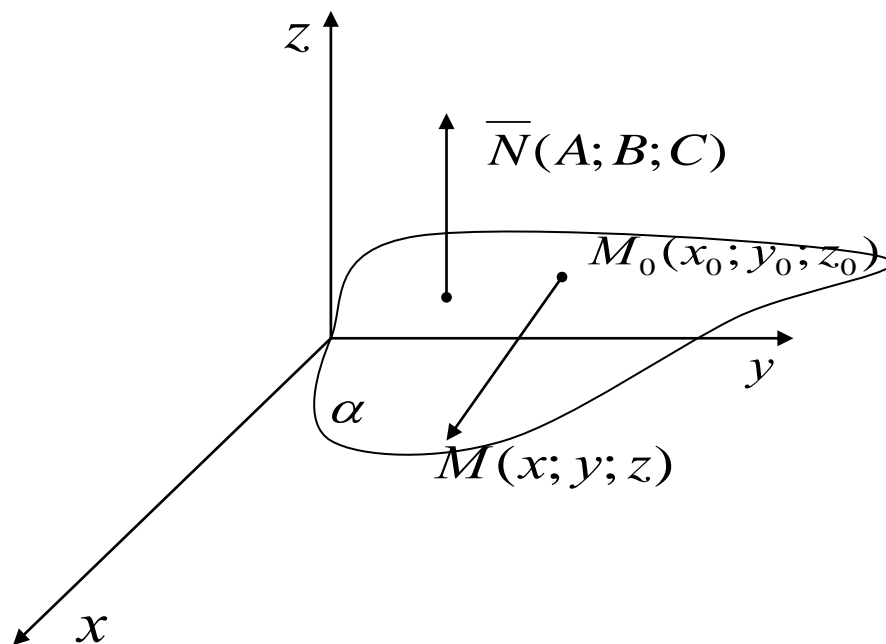
Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2}; 0)$

Эксцентриситет параболы считается равным 1

§16. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



Пусть точка $M(x; y; z) \in \alpha$, тогда вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Так как $\overline{N} \perp \alpha$, то $\overline{N} \perp \overline{M_0M}$, тогда

$$\boxed{\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0}$$

- *векторное*

уравнение плоскости

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

уравнение плоскости в координатах

§17 Общее уравнение плоскости

В уравнении

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

раскроем скобки и приведем подобные:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_D = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- общее уравнение плоскости,

где A, B, C – координаты нормального вектора;

x, y, z – координаты точки M .

Частные случаи:

1) $D = 0$ – плоскость, проходит через начало координат.

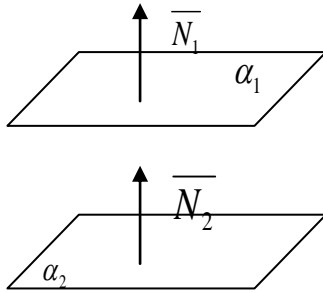
2) Если отсутствует одна из координат, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости.

3) Если отсутствуют две координаты, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

§18 Взаимное расположение двух плоскостей

a)

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2$$



$$\alpha_1 : A_1x + B_1y +$$

$$+ C_1z + D_1 = 0$$

$$\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y +$$

$$+ C_2z + D_2 = 0$$

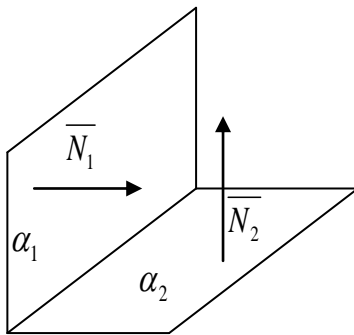
$$\overline{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$$

т.к. $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$, то

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

б)

$$\alpha_1 \perp \alpha_2$$



т.к. $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0$

$$\boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$$

в) Если плоскости расположены под углом друг к другу, то находят

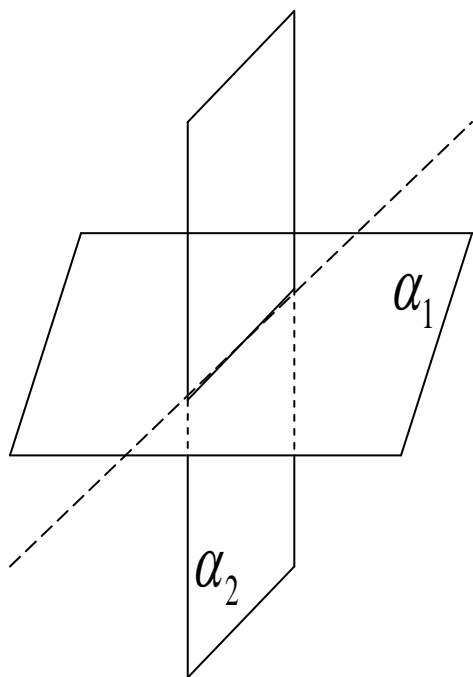
$$\boxed{\cos(\overline{N_1}; \overline{N_2}) = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}}$$

§19 Нахождение координат любой точки, принадлежащей данной плоскости.

Чтобы найти координаты точки, принадлежащей плоскости, две координаты выбирают произвольно, подставляют в уравнение плоскости, а третью координату находят из полученного равенства.

§20 Прямая в пространстве R^3

Определение 1. Прямая в системе $OXYZ$ рассматривается как линия пересечения двух плоскостей.



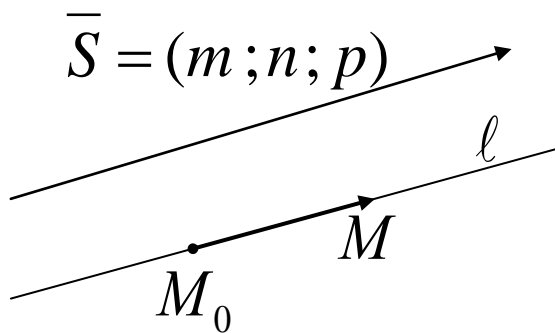
$$l = \alpha_1 \cap \alpha_2$$

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

общее уравнение прямой в R^3

Прямая в R^3 может быть задана с помощью направляющего вектора.

Определение 2. Вектор $\vec{S} = (m; n; p)$,
 параллельный прямой l
 называется направляющим вектором прямой.



Пусть точка $M_0 \in l$. Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x; y; z)$. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Так как $\vec{S} \parallel l$, то $\vec{S} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow$ их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (2)$$

канонические уравнения прямой,

где m, n, p – любые действительные числа, в том числе и ноль, т.к.

запись символическая. Но одновременно все три координаты m , n , p нулю быть равными не могут.

§21 Угол между прямыми в пространстве.

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos \phi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

§22 Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Определение 1. Квадратичную форму от 2-х и более переменных можно определить как однородный многочлен 2-го порядка от этих переменных (сумма показателей степени x и y в каждом слагаемом равна 2).

Квадратичная форма от двух переменных имеет вид:

$$f(x; y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (1)$$

Например:

$5x^2 + 6xy + 7y^2$ - квадратичная форма от двух переменных. Здесь $a_{11} = 5$; $a_{12} = 3$; $a_{22} = 7$. Сумма показателей степени x и y для каждого слагаемого равна двум.

Определение 2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{21} = a_{12}$$

называется *матрицей квадратичной формы.*

Например:

Для квадратичной формы $5x^2 + 6xy + 7y^2$ матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Матрица A – *симметрическая матрица*. С ее помощью всякую квадратичную форму можно записать в виде:

$$\boxed{f(x; y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]} \quad (2)$$

В самом деле:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y \\ a_{21}x & a_{22}y \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}xy + a_{22}y^2 =$$

$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = f(x; y)$$

Запись (2) показывает, что квадратичная форма имеет наиболее простой (канонический) вид в том базисе, в котором наиболее простой вид имеет матрица A .

Наиболее подходящим в этом смысле является базис из собственных векторов оператора, порожденного матрицей A . В нем A принимает вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где λ_1 и λ_2 - собственные числа оператора, порожденного матрицей A .

Отсюда следует, что для приведения квадратичной формы к каноническому виду необходимо *с помощью ортогонального оператора перейти* от данного базиса $\langle \bar{i}; \bar{j} \rangle$ к базису $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$ из *нормированных*

собственных векторов оператора, порожденного матрицей A .

Определение 3. Базис называют **ортонормированным**, если у него векторы попарно ортогональны (т.е. \perp) и нормированы (т.е. имеют единичную длину).

Определение 4. Для того, чтобы **нормировать** вектор достаточно разделить его на его длину.

Пример:

$$\bar{a} = \{2, 3, 6\} \quad ; \quad |\bar{a}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left\{ \frac{2}{7} ; \frac{3}{7} ; \frac{6}{7} \right\}$$

Ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между векторами, поэтому он ортонормированный базис

$\langle \bar{i} ; \bar{j} \rangle$ переводит в ортонормированный базис $\langle \tilde{i} ; \tilde{j} \rangle$.

В новом базисе $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$ квадратичная форма примет вид:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}; \tilde{y}) &= (x \quad y) \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = \\ &= (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \tilde{x} \\ \lambda_2 & \tilde{y} \end{pmatrix} = \\ &= \boxed{\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2} \quad - \text{ канонический вид} \\ &\quad \text{квадратичной формы.} \end{aligned}$$

Вывод: Всякая квадратичная форма от 2-х переменных приводится с помощью ортогонального оператора к каноническому виду: $\boxed{\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2}$, где λ_1 и λ_2 - собственные числа оператора, порожденного матрицей квадратичной формы.

Пример: Привести к каноническому виду квадратичную форму:

$$f(x; y) = 3x^2 + 4xy + 6y^2$$

Решение: Составляем матрицу A и находим собственные числа оператора, порожденного матрицей A .

$$a_{11} = 3 \quad ; \quad a_{12} = 2 \quad ; \quad a_{22} = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad ; \quad \lambda_2 = 7$$

Следовательно, канонический вид данной квадратичной формы:

$f(\tilde{x}; \tilde{y}) = 2\tilde{x}^2 + 7\tilde{y}^2$ в базисе из нормированных собственных векторов оператора порожденного матрицей A .

§23 Приведение общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду

Пусть требуется привести к каноническому виду общее уравнение кривой 2-го порядка:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12} \cdot xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0} \quad (1)$$

Причем, квадратичная форма этого уравнения уже к каноническому виду

приведена: $\boxed{\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2}$.

Тогда, чтобы записать уравнение этой кривой в базисе $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$, преобразуем линейную форму $\underline{b_1x + b_2y}$ данного уравнения. С этой целью находим координаты базисных векторов $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$ в базисе $\langle \bar{i}; \bar{j} \rangle$, составляя матрицу H ортогонального оператора перехода от базиса $\langle \bar{i}; \bar{j} \rangle$ к базису $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} - \text{матрица перехода от старого}$$

базиса к новому.

$$\begin{cases} \tilde{i} = h_{11}\bar{i} + h_{21}\bar{j} \\ \tilde{j} = h_{12}\bar{i} + h_{22}\bar{j} \end{cases}$$

Записываем формулы перехода от координат x, y к координатам $\tilde{x}; \tilde{y}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = h_{11}\tilde{x} + h_{12}\tilde{y} \\ y = h_{21}\tilde{x} + h_{22}\tilde{y} \end{cases}$$

Получаем

уравнение:

$$\boxed{\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + c_1 \tilde{x} + c_2 \tilde{y} + c = 0} \quad (2).$$

При этом важно, чтобы λ_1 - соответствовала \tilde{i} , а λ_2 - соответствовала \tilde{j} .

Дальнейшее упрощение уравнения кривой осуществляется путем выделения полных квадратов в уравнении (2) и заменой получающихся разностей вида: $(\tilde{x} - a)$ и $(\tilde{y} - b)$ переменными X ; Y ($X = \tilde{x} - a$; $Y = \tilde{y} - b$).

Геометрически эта операция равносильна параллельному переносу осей координат $O\tilde{X} ; O\tilde{Y}$, при котором начало координат помещается в точку с координатами $(a; b)$. Полученное уравнение относительно переменных X и Y и будет искомым каноническим уравнением кривой.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение кривой:

$$\boxed{x^2 - 4xy + 4y^2} \boxed{-14x - 2y} \boxed{+7} = 0$$

1. Приводим к каноническому виду квадратичную форму данного уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad ; \lambda_1 = 5 \quad ; \lambda_2 = 0$$

Следовательно, канонический вид

квадратичной формы: $\boxed{5\tilde{x}^2}$.

2. Для преобразования линейной формы находим координаты в базисе $\langle \bar{i}; \bar{j} \rangle$ для базиса $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$, составленного из нормированных собственных векторов оператора, порожденного матрицей A .

Из системы

$$\begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{см. §7} \\ \text{гл. 3} \end{array} \right) \text{ имеем:}$$

$$\text{при } \lambda_1 = 5 \quad \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\{y = -2x\}$$

$\{c; -2c\}$ – собственные векторы

$$\underline{\tilde{i}} = \left\{ \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4c^2}}; \frac{-2c}{\sqrt{c^2 + 4c^2}} \right\} =$$

$$\text{откуда} = \underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}}; \quad ;$$

$$\text{при } \lambda_2 = 0 \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = 2y\}$$

$\{2k; k\}$ – собственные векторы

$$\underline{\tilde{j}} = \left\{ \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + k^2}}; \frac{k}{\sqrt{4k^2 + k^2}} \right\} =$$

$$\text{откуда} = \underline{\left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}}$$

Составляем матрицу H , записываем формулы перехода от координат $(x; y)$ к

$$\text{координатам } (\tilde{x}; \tilde{y}): H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, то искомые формулы перехода имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{y} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{y} \end{cases}$$

Преобразуем линейную форму уравнения:

$$\begin{aligned} -14x - 2y &= -14 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right) - 2 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{y} \right) = \\ &= \boxed{-\frac{10}{\sqrt{5}} \tilde{x} - \frac{30}{\sqrt{5}} \tilde{y}} \end{aligned}$$

Таким образом, в базисе $\langle \tilde{i}; \tilde{j} \rangle$ уравнение кривой имеет вид:

$$\boxed{5\tilde{x}^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} \tilde{x} - \frac{30}{\sqrt{5}} \tilde{y} + 7 = 0}.$$

Для дальнейшего упрощения уравнения кривой делаем выделение полных квадратов:

$$5\left(\tilde{x}^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{5}\right) - 1 - \frac{30}{\sqrt{5}}\tilde{y} + 7 = 0$$

$$5\left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0 \quad \text{или}$$

$$5\left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}\left(\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

Делаем замену: $\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}} = X$; $\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{5}} = Y$,

получим
$$5X^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}Y = 0$$

Окончательно
$$\boxed{Y = \frac{6}{\sqrt{5}}X^2} \quad O'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) -$$

уравнение параболы, симметричной оси OY .

Замечание. Квадратичная форма упрощается поворотом осей координат, а линейная форма - параллельным переносом осей.

